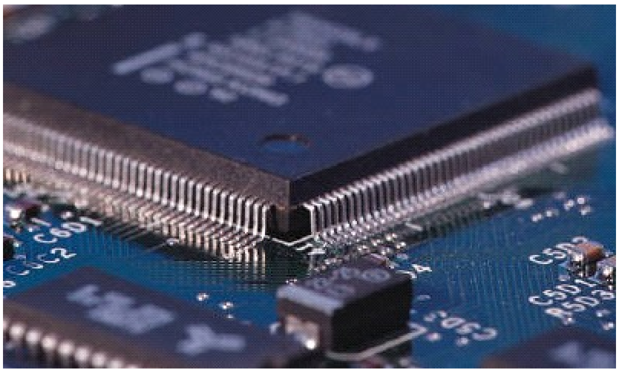
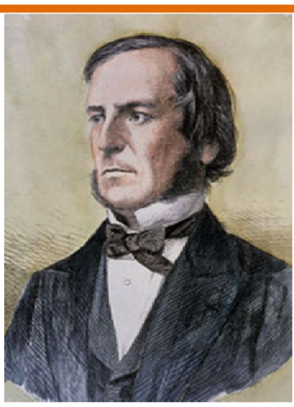
บทที่ 3
พีชคณิตบูลีน



วัตถุประสงค์

1. เข้าใจกฎของพีชคณิตบูลีน และ ดี มอร์แกน
2. ลดรูปสมการและวงจรลอจิกด้วยทฤษฎีต่างๆได้
3. เขียนสมการ SOP/ POS/ Min Term และ Max Term จากตารางความจริงได้



George Boole
1815-1864

3-1 บทนำ

พีชคณิตบูลีนค้นพบโดย George Boole นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษ ประกอบด้วยสมการที่แสดงความสัมพันธ์ของค่าคงที่และตัวแปร แต่ค่าคงที่ของพีชคณิตบูลีน คือค่าในเลขฐาน 2 (1 และ 0 เท่านั้น) ส่วนค่าคงที่ในพีชคณิตทั่วไปคือค่าตัวเลขฐาน 10 (ประกอบไปด้วยเลข 0-9) ดังนั้นกฎและสูตรต่าง ๆ ของพีชคณิตบูลีนจึงแตกต่างกว่า ตัวกระทำในพีชคณิตบูลีนมี 3 ตัว คือ แอนด์ (AND ( )) ออร์ (OR (+)) นอต (NOT (-)) และตัวกระทำดังกล่าวเป็นกฎที่เป็นจริงเสมอ และตัวกระทำเหล่านี้ได้มีผู้ศึกษาแล้วว่ามีความสัมพันธ์กันกับลักษณะของวงจรรีเลย์ คือ การเปิดและปิดหน้าสัมผัสของวงจรรีเลย์ เปรียบได้กับตัวแปรในสมการบูลีนกระทำการ AND, OR หรือ NOT กัน ต่อมาเมื่อวิวัฒนาการทางด้านการสร้างวงจรรวมเกี่ยวกับวงจรสวิตชิ่ง มีการพัฒนามากขึ้น จึงมีการสร้างวงจรสวิตชิ่งที่ทำหน้าที่เป็นตัวกระทำ AND, OR และ NOT บรรจุอยู่ในวงจรรวมแบบตัวถังพลาสติกทั้งชนิดทีทีแอลและซีมอสโดยให้ชื่อวงจรที่ทำหน้าที่เป็นตัวกระทำดังกล่าวว่าแอนด์เกตออร์เกต และนอตเกต มีความสัมพันธ์เหมือนกับวงจรรีเลย์ที่มีการเปิดและปิดของหน้าสัมผัสที่มีความสัมพันธ์กับพีชคณิตบูลีน จึงนิยมใช้พีชคณิตบูลีนแก้ไขปัญหาทางวงจรดิจิตอลอิเล็กทรอนิกส์ เช่น

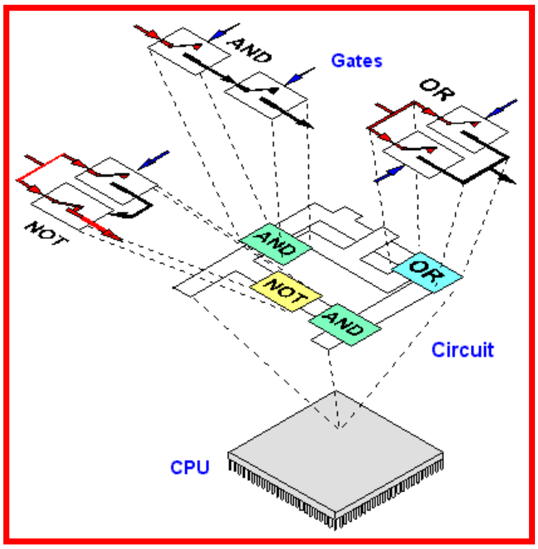
ในด้านการออกแบบวงจรดิจิตอลตามเงื่อนไขหรือฟังก์ชันที่กำหนดโดยลักษณะของงานที่แตกต่างกัน การเปลี่ยนรูปแบบของวงจร และการลดต้นทุนการผลิตวงจร

3-2 กฎของพีชคณิตบูลีน (Boolean algebra Law's)

กฎและสูตรต่าง ๆ ที่เขียนขึ้นมาจากการกระทำตามตัวกระทำของตัวแปรใด ๆ หรือค่าคงที่ใด ๆ กับตัวแปร ซึ่งแยกเป็น 6 กลุ่ม รวม 21 สูตร คือ

1. กฎของนอต (NOT)

1. $\overline{0} = 1$
2. $\overline{1} = 0$
3. ถ้า $A = 0$ แล้ว $\overline{A} = 1$
4. ถ้า $A = 1$ แล้ว $\overline{A} = 0$
5. $\overline{\overline{A}} = A$



2. กฎของแอนด์ (AND)

6. $A \cdot 0 = 0$
7. $A \cdot 1 = A$
8. $A \cdot A = A$
9. $A \cdot \overline{A} = 0$

3. กฎของออร์ (OR)

10. $A + 0 = A$
11. $A + 1 = 1$
12. $A + A = A$
13. $A + \overline{A} = 1$

4. กฎของการสลับที่ (Commutative Law)

14. $A \cdot B = B \cdot A$
15. $A + B = B + A$

5. กฎของการรวมกัน (Associative Law)

16. $A+(B+C)=(A+B)+C$

17. $A(BC)=(AB)C$

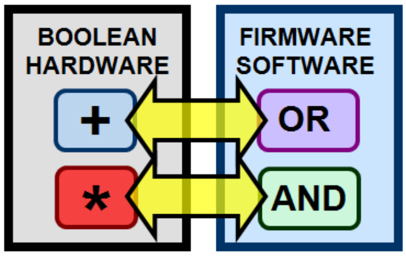
6. กฎของการกระจ่าย (Distributive Law)

18. $A(B+C)=(AB)+(AC)$

19. $A+(BC)=(A+B)(A+C)$

20. $A+\overline{A}B=A+B$

21. $\overline{A}+AB=\overline{A}+B$



ตัวอย่างที่ 3-1 จงหาค่า Y จากสมการ $Y=A+\overline{A}+B$

วิธีทำ $Y=1+B$ $(A+\overline{A}=1)$ กฎข้อ 13

ตอบ $Y=1$ $(1+B=1)$ กฎข้อ 11

ตัวอย่างที่ 3-2 จงหาค่าของ Y จากสมการ $Y=A(B+C)\overline{A}+D$

วิธีทำ $=\{A\cdot\overline{A}(B+C)\}+D$ $(A\cdot\overline{A}=0)$ กฎข้อ 9

$=\{0(B+C)\}+D$ $(0\cdot A=0)$ กฎข้อ 6

$=0+D$ $(0+A=A)$ กฎข้อ 9

ตอบ $Y=D$

ตัวอย่างที่ 3-3 จงพิสูจน์ว่า $(A+B)\cdot(A+\overline{B})=A$

วิธีทำ $(A+B)\cdot(A+\overline{B})=\underbrace{A\cdot A}+A\cdot\overline{B}+A\cdot B+\underbrace{B\cdot\overline{B}}$

$=A+A\cdot\overline{B}+A\cdot B+0$

$=A+A(\underbrace{\overline{B}+B})$

$=A+A\cdot 1$

ตอบ $=A$

ตัวอย่าง 3-4 จงพิสูจน์ว่าสมการ $(\overline{A+B}) = AB+(AB+\overline{A}\overline{B})$

$$X = A(B+B)+\overline{A}\overline{B}$$

$$= AB+\overline{A}\overline{B}+O = AB+\overline{A}\overline{B}+\overline{A}A$$

$$= \overline{A}\overline{B}+A(B+\overline{A})$$

$$= (\overline{A}\overline{B}+A)(\overline{A}\overline{B}+B+\overline{A})$$

$$= \overline{B}\cdot(\overline{A}+\overline{A}) = \overline{B}\cdot\overline{A}$$

ตอบ $\therefore \quad X = \overline{A+B}$

ตัวอย่าง 3-5 จงพิสูจน์ว่าสมการ F และ N เท่ากัน

$$F = (X+\overline{Z})\cdot(X+Y+\overline{Z})\cdot(Y+\overline{Z})$$

$$N = (XY+\overline{Z})$$

วิธีทำ

$$F = (X+\overline{Z})\cdot(X+Y+\overline{Z})\cdot(Y+\overline{Z})$$

$$= (XX+XY+X\overline{Z}+X\overline{Z}+\overline{Y}Z+\overline{Z}\,\overline{Z})\cdot(Y+\overline{Z})$$

$$= (X+XY+X\overline{Z}+\overline{Y}Z+\overline{Z})\cdot(Y+\overline{Z})$$

$$= X(1+\overline{Z})+\overline{Z}\,(Y+1)(Y+\overline{Z})$$

$$= X+\overline{Z}(Y+\overline{Z})$$

$$= XY+X\overline{Z}+\overline{Z}Y+\overline{Z}$$

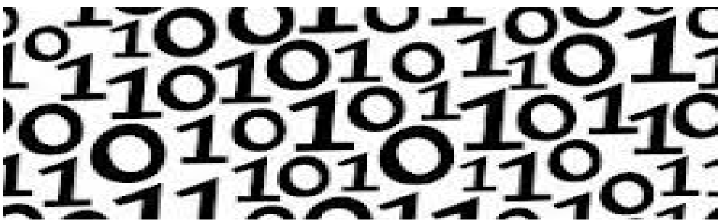
$$= XY+\overline{Z}(X+1)+\overline{Z}Y$$

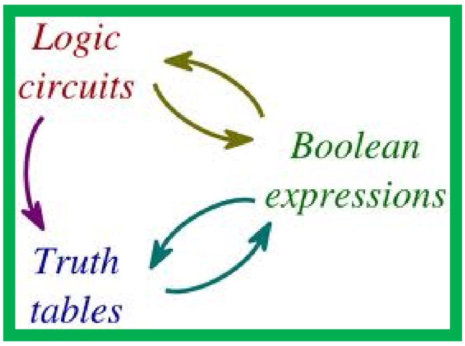
$$= XY+\overline{Z}+\overline{Z}Y$$

$$= XY+\overline{Z}(1+Y)$$

$$= XY+\overline{Z}$$

ตอบ สมการ $F = N$





3-3 การลดรูปสมการพีชคณิตบูลีน (Boolean Expression Reduction)

การลดรูปสมการพีชคณิตบูลีน (หรือสมการลอจิก) ที่มีความยาวมากๆ ให้สั้นลงได้ทำให้เกิดผลดีอย่างมากกับการออกแบบวงจรลอจิก เพราะสมการบูลีนนั้นมีความสัมพันธ์กับการกระทำของเกตต่าง ๆ และสามารถเขียนวงจรลอจิกแทนตัวกระทำต่าง ๆ ในสมการบูลีนได้ ดังนั้นแทนที่เราจะต้องเสียต้นทุนและเวลาในการออกแบบวงจรลอจิกให้มีขนาดเล็กลง เราก็กลับมาใช้พีชคณิตบูลีนลดรูปสมการของวงจรลอจิกนั้นเสียก่อนแล้วจึงมาประกอบเป็นวงจรลอจิกที่เล็กลงได้อีกครั้งหนึ่ง

ตัวอย่าง 3-6 จงลดรูปสมการต่อไปนี้ให้มีขนาดเล็กที่สุด

$f(A,B,C) = (A+\overline{A}\cdot\overline{B}) + (A+\overline{A}\cdot\overline{C}) + BC$

วิธีทำ

$$\begin{aligned} f(A,B,C) &= (A+\overline{A}\cdot\overline{B}) + (A+\overline{A}\cdot\overline{C}) + BC \\ &= (A+\overline{B}) + (A+\overline{C}) + BC \\ &= A+\overline{B}+\overline{C}+B\cdot C \\ &= A+\overline{B}+C+C \\ &= A+\overline{B}+1 \end{aligned}$$

ตอบ $f(A,B,C) = 1$

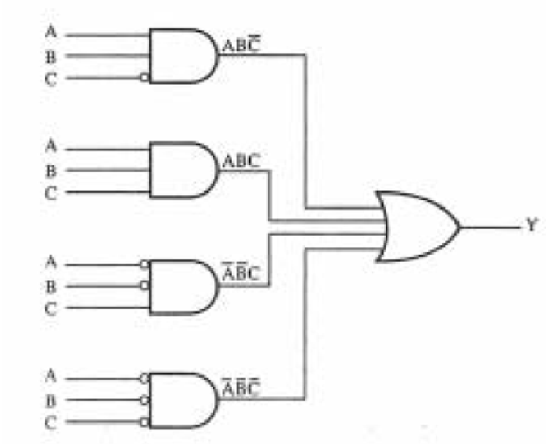
ตัวอย่าง 3-7 จงลดรูปสมการ $Y = AB+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}D+\overline{A}C$

วิธีทำ

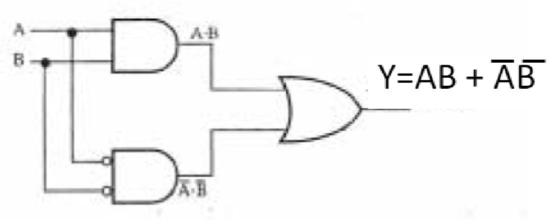
$$\begin{aligned} Y &= AB+\overline{A}B\overline{C}+A\overline{B}D+\overline{A}C \\ &= B(A+\overline{A}\overline{C})+A\overline{B}D+\overline{A}C \\ &= B(A+C)+A\overline{B}D+\overline{A}C \\ &= AB+B\overline{C}+A\overline{B}D+\overline{A}C \\ &= A(B+\overline{B}D)+B\overline{C}+\overline{A}C \end{aligned}$$

ตอบ $Y = AB+AD+B\overline{C}+\overline{A}C$

ตัวอย่าง 3-8 จากวงจรลอจิกในรูปที่ 3-1 จงเขียนสมการเอาต์พุต และลดรูปสมการนี้ เขียนได้และเขียนวงจรลอจิกที่ลดรูปแล้ว



รูปที่ 3-1



รูปที่ 3-2

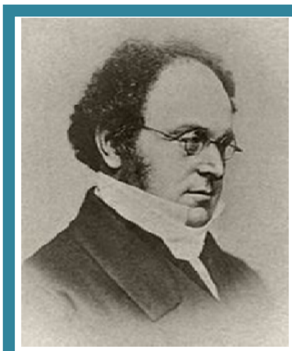
วิธีทำ 1. เขียนสมการของเอาต์พุต $Y = ABC + ABC + ABC + ABC$

$= AB\,(C + C) + AB\,(C + C)$

2. ลดรูปสมการได้ $Y = AB + AB$

3. เปลี่ยนสมการเป็นวงจรลอจิกได้ดังรูปที่ 3-2

3-4 ทฤษฎี ดี มอร์แกน (De'morgan Theorem)



Augustus De Morgan
(1806-1871)

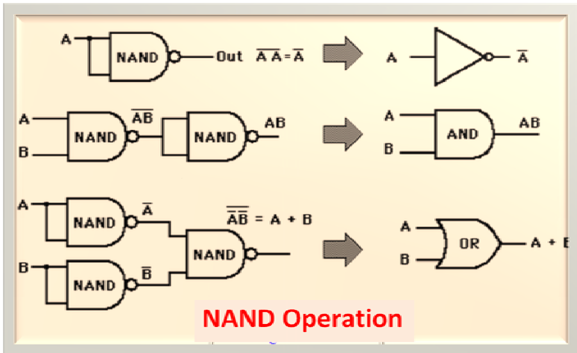
ค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อ Augustus De Morgan (1806-1871) เป็นทฤษฎีที่ใช้ประโยชน์ในการแก้ปัญหาของพีชคณิตบูลีน กรณีที่สมการของตัวแปรใด ๆ ติดเครื่องหมาย $\overline{AND}$ และ $\overline{OR}$ ซึ่งสามารถเปลี่ยนกลับจากเครื่องหมาย $\overline{AND}$ เป็น OR และเปลี่ยนสมการจากเครื่องหมาย $\overline{OR}$ เป็น AND ได้ ขอให้พิจารณา 2 สมการต่อไปนี้

1. $\overline{A \cdot B} = A + B$ (สมการเปลี่ยน $NAND$ เป็น OR)

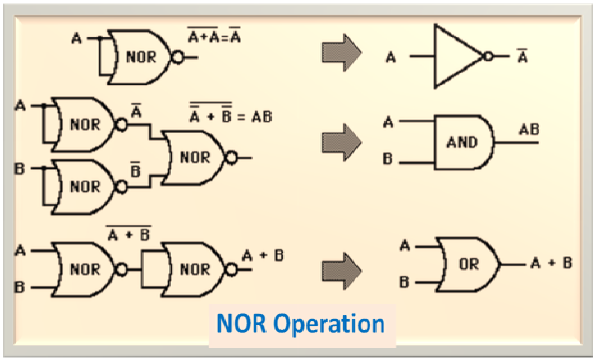
2. $\overline{A + B} = A \cdot B$ (สมการเปลี่ยน NOR เป็น AND)

หลักการใช้ทฤษฎีของ ดี มอร์แกน มีขั้นตอนต่อไปนี้

1. Complement function (โดยการใส่เครื่องหมาย NOT ตลอดทั้งฟังก์ชัน)
2. Change operator (เปลี่ยนตัวกระทำ AND เป็น *OR* และ *OR* เป็น AND
3. Complement variable (ใส่เครื่องหมาย NOT ที่ตัวแปร)



NAND Operation



NOR Operation

ตัวอย่าง 3.9 กำหนดให้สมการ $Y = A+(\overline{B}\cdot C)$

$= \overline{A+(\overline{B}\cdot C)}$ ขั้นตอนที่ (1)

$= \overline{A\cdot(\overline{B}\cdot C)}$ ขั้นตอนที่ (2)

$= \overline{A\cdot(\overline{B}\cdot C)}$ ขั้นตอนที่ (3)

$= \overline{A\cdot(\overline{\overline{\overline{B}}}\cdot C)}$ ขั้นตอนที่ (1)

$= \overline{\overline{A}\cdot(\overline{B}+C)}$ ขั้นตอนที่ (2)

$= \overline{\overline{A}\cdot(B+\overline{C})}$ ขั้นตอนที่ (3)

จากตัวอย่างจะเห็นว่าถ้าสมการนั้นมีหลายเทอม ถ้าใช้ดีมอร์แกน ก็ต้องทำกับเครื่องหมาย *OR* และ AND ทุกเครื่องหมาย โดยกำหนดให้แต่ละเทอมที่กระทำการ *OR* หรือ AND นั้นมีความหมายเหมือนตัวแปรตัวเดียว

ตัวอย่าง 3.10 จากสมการต่อไปนี้จงลดรูปสมการให้สั้นที่สุด

วิธีทำ $F = WX(\overline{\overline{Y}\cdot Z})+W\overline{X}\overline{Z}$

$= WX(Y+\overline{Z})+W\overline{X}\overline{Z}$

$= WXY+WX\overline{Z}+W\overline{X}\overline{Z}$

$= WXY+W\overline{Z}+(X+\overline{X})$

$= W\overline{Z}+WXY$

ตอบ $F = W(\overline{Z}+XY)$

ตัวอย่าง 3.11 จงใช้ทฤษฎีพีชคณิตบูลีน และทฤษฎีดีมอร์แกน ลดรูปสมการต่อไปนี้

$$F = (X+\overline{Z})\,(\overline{Z+WY})+(VZ+W\overline{X})\,(\overline{Y+Z})$$

วิธีทำ ใช้ทฤษฎีดีมอร์แกน $(\overline{Z+WY}) = \overline{Z}\,(\overline{W}+\overline{Y})$

และได้ว่า $(\overline{Y+Z}) = \overline{Y}\,\overline{Z}.$

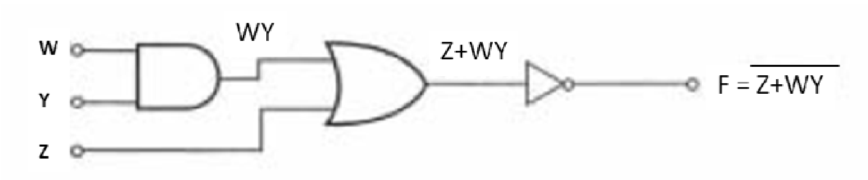
ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
F &= (X+\overline{Z})\overline{Z}(\overline{W}+\overline{Y})+(VZ+W\overline{X})\overline{Y}\,\overline{Z} \\
&= (X\overline{Z}+\overline{Z})(\overline{W}+\overline{Y})+W\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \\
&= \overline{Z}(\overline{W}+\overline{Y})+W\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \\
&= \overline{Z}\,\overline{W}+\overline{Z}\,\overline{Y}+W\overline{X}\,\overline{Y}\,\overline{Z} \\
&= \overline{Z}\,\overline{W}+\overline{Z}\,\overline{Y}+(1+W\overline{X}) \\
&= \overline{Z}\,\overline{W}+\overline{Z}\,\overline{Y}
\end{aligned}
$$

$$F = \overline{Z}(\overline{W}+\overline{Y}) \quad \text{.........(a)}$$

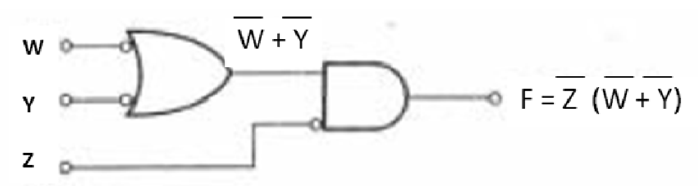
$$= \overline{Z+(\overline{\overline{W}}+\overline{\overline{Y}})}$$

$$F = \overline{Z+WY} \quad \text{..........(b)}$$



(a)

รูปที่ 3.3 วงจรลดรูปที่ออกแบบได้จากตัวอย่าง 3.11



(b)

รูปที่ 3.4 วงจรรูปที่ออกแบบได้จากตัวอย่าง 3.11

ตัวอย่าง 3.12 จงลดรูปสมการให้สั้นที่สุด $F = (X+\overline{Z})(\overline{Z+WY}) + (VZ+W\overline{X})(\overline{Y+Z})$

วิธีทำ $F = (X+\overline{Z})(\overline{Z+WY}) + (VZ+W\overline{X})(\overline{Y+Z})$

กำหนดฟังก์ชันสมมติใหม่ดังนี้

$$F = F_1\ F_2 + F_3\ F_4$$

$$F = F_5 + F_6$$

จะได้ว่า

$$F_1 = X+Z$$

$$F_2 = (\overline{Z+WY})$$

$$F_3 = (VZ+WY)$$

$$F_4 = (\overline{Y+Z})$$

$F_5 = F_1\ F_2$ และ $F_6 = F_3\ F_4$

กำหนดวิธีการลดรูปสมการทีละขั้นจะได้ว่า

$$F = F_5 + F_6$$

$$\overline{F} = \overline{F_5} \cdot \overline{F_6}$$

$$\overline{F_5} = \overline{F_1} + \overline{F_2}$$

$$\overline{F_6} = \overline{F_3} + \overline{F_4}$$

นั่นคือ $\overline{F} = (\overline{F_1} + \overline{F_2})(\overline{F_3} + \overline{F_4})$

และ $\overline{F_1} = \overline{X}Z$

$$\overline{F_2} = \left[(\overline{Z+WY})\right] = Z+WY$$

$$\overline{F_3} = (\overline{V}+\overline{Z})(\overline{W}+X)$$

$$\overline{F_4} = Y+Z$$

ขั้นตอนสุดท้ายลดรูปสมการด้วยพีชคณิตบูลีน

$$\overline{F} = (\overline{X}Y+Z+WY)\left[(\overline{V}+\overline{Z})(\overline{W}+X)+Y+Z\right]$$

$$= (Z+WY)(\overline{F_3}+Y+Z)$$

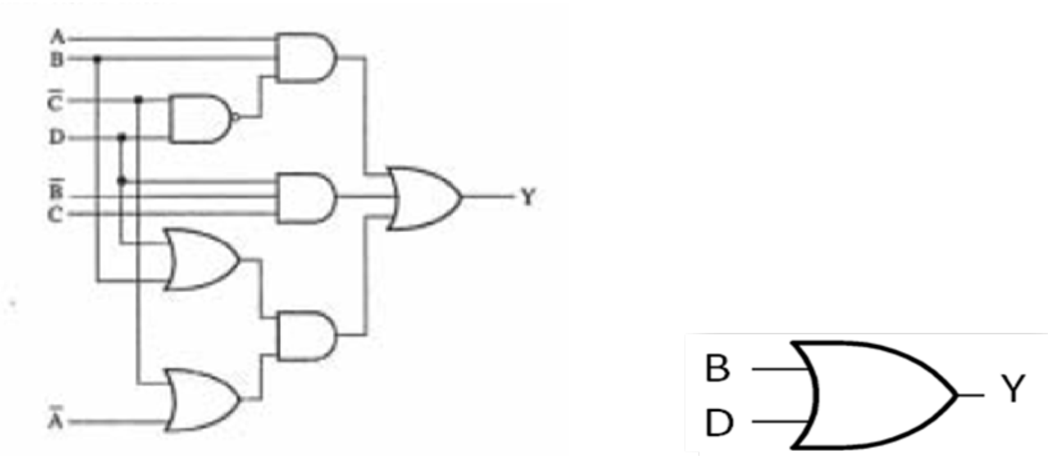
$$= Z+ZY+Z\overline{F_3}+WY\overline{F_3}+WYZ+WY$$

$$= Z(1+Y+\overline{F_3})+WY(1+Z+\overline{F_3})$$

ตอบ $F = Z+WY$

หมายเหตุ ตัวอย่าง 3.11 และ 3.12 ให้ผลลัพธ์ที่เท่ากันตัวอย่าง 3.11 ใช้เทคนิคการสมมติฟังก์ชันเพื่อให้สมการมีรูปแบบที่ดูง่ายกว่าเดิม ตัวอย่าง 3.12 เป็นแนวทางในการแก้ไขปัญหาการลดรูปสมการพีชคณิตบูลีนที่ดี

ตัวอย่าง 3.13 จากวงจรลอจิกต่อไปนี้จงลดรูปวงจรลอจิกใหม่ให้มีขนาดเล็กที่สุด และสเก็ตช์ภาพวงจรลอจิกที่ออกแบบได้



(a) Original circuit (b) Simplified circuit

รูปที่ 3.5 แสดงวงจรของตัวอย่าง และวงจรที่ลดรูปแล้วด้วยพีชคณิตบูลีน

วิธีทำ จากวงจรเขียนสมการได้ $Y = AB(\overline{\overline{C}D}) + BCD + (B + D)(\overline{A} + \overline{C})$

$$
\begin{aligned}
Y &= AB(\overline{\overline{C}D}) + BCD + (\overline{A} + \overline{C})(B + D) \\
&= AB(C + \overline{D}) + \overline{B}CD + (\overline{A} + \overline{C})(B + D) \\
Y &= ABC + AB\overline{D} + \overline{B}CD + \overline{A}B + \overline{A}D + B\overline{C} + \overline{C}D \\
&= B(AC + \overline{A}) + AB\overline{D} + D(\overline{B}C + \overline{C}) + \overline{A}D + B\overline{C} \\
&= B(C + \overline{A}) + AB\overline{D} + D((\overline{C} + \overline{B}) + \overline{A}D + B\overline{C} \\
&= BC + B\overline{C} + BA + ABD + D\overline{C} + D\overline{B} + \overline{A}D \\
&= B + DB + DC + AD \\
Y &= B + D
\end{aligned}
$$

3.5 สมการ SOP และสมการ POS (SOP and POS Equation)

ตารางความจริง (Truth table) คือตารางแสดงการกระทำของตัวกระทำกับตัวแปรใด ๆ ของสมการบูลีน เช่น สมการ $Y = A + B\overline{C}$ ก็หมายถึง $Y = f(A, B, C)$ ซึ่งตัวแปร A, B, C กระทำการ AND, OR, NOT กัน เป็นต้น ซึ่งเราสามารถจะแทนค่าคงที่ (0 หรือ 1) แทนในตัวแปร A, B หรือ C เราสามารถบอกได้ว่า Y หรือ $f(A, B, C)$ นั้นมีค่าเท่าไรและการแทนค่าคงที่ดังกล่าวลงในตัวแปร A, B, C นั้นก็กระทำกันได้ 8 ครั้งเท่ากับจำนวนบรรทัดของตารางความจริง เนื่องจากจำนวนบรรทัดของตารางความจริงคือ 2 ตัวแปร เช่น ถ้าวงจรลอจิกมีตัวแปรเพียง 2 ตัวแปร จำนวนบรรทัดของตารางความจริงคือ $2^2 = 4$ บรรทัด หรือกรณีวงจรลอจิกมีตัวแปร 3 ตัวแปรจะมีจำนวนบรรทัดของตารางความจริงเท่ากับ 2^3 บรรทัด (8 บรรทัด) เป็นต้น

เมื่อพิจารณาสมการ $Y = A + B \cdot \overline{C}$ จะเขียนตารางความจริงของสมการได้ดังนี้

ตารางความจริงของ $f(A, B, C) = A + B\overline{C}$

A	B	C	$\overline{C}$	$B \cdot \overline{C}$	$A + B\overline{C}$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1

จากตารางความจริงแสดงค่า $f(A, B, C) = A + BC$ จะเห็นว่าค่าของ Y หรือ $f(A, B, C)$ นั้นจะมีค่าเป็น 0 หรือ 1 ตามแต่การกระทำของตัวแปรในสมการ $Y = A + B\overline{C}$ และค่าของ Y นี้ก็คือเอาต์พุตของสมการ $A + B\overline{C}$ นั้นเอง อาจเขียนตารางความจริงใหม่ให้มีรูปแบบที่ชัดเจนขึ้นดังนี้

A	B	C	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\overline{A}B\overline{C}$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$A\overline{B}\overline{C}$
1	0	1	1	$A\overline{B}C$
1	1	0	1	$AB\overline{C}$
1	1	1	1	ABC

นำทั้ง 5 เทอมมา OR กันคือฟังก์ชันแบบ SOP

จากตารางความจริงสามารถถอดความสัมพันธ์ในตารางออกมาเป็นสมการพีชคณิตบูลีนได้เช่นเดียวกัน วิธีแรกคือ ให้พิจารณาเอาต์พุตที่เป็น 1 ของตารางความจริง และเขียนเทอมของตัวแปร A, B, C ออกมาทีละเทอม โดยแทนค่าตัวแปรที่เป็น 0 หรือ $\overline{A},\overline{B}$ หรือ C และตัวแปรที่เป็น 1 ด้วย A, B หรือ C ตัวแปรแต่ละตัวกระทำการ AND กัน และนำเทอมของตัวแปรแต่ละเทอมที่เขียนได้จากเอาต์พุตที่เป็น 1 มากระทำ OR กัน เรียกว่า วิธีเขียนสมการแบบ Sum of Product (SOP) หรือ Min term

จากตารางความจริงสามารถเขียนสมการ SOP ได้ว่า

$$Y = \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$$

สมการจะมีค่าเท่ากับ $Y = A + BC$ สามารถพิสูจน์ได้ว่าเท่ากันจริงโดยถอดสมการ SOP ที่ได้ให้สมการลดลงโดยใช้พีชคณิตบูลีนช่วยในการลดรูปสมการดังต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
Y &= \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC \\
&= \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B}\,(\overline{C} + C) + AB\overline{C} + ABC \\
&= \overline{A}B\overline{C} + A\overline{B} + AB\,(\overline{C} + C) \\
&= \overline{A}B\overline{C} + A\,(\overline{B} + B) \\
&= A + \overline{A}B\overline{C} \\
Y &= A + B\overline{C}
\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3-14 จากตารางความจริงจงเขียนสมการพีชคณิตบูลีน SOP และลดรูปสมการ

X	Y	Z	f(X, Y, Z)	
0	0	0	1	$\longrightarrow$ $(\overline{X}\overline{Y}\overline{Z})$
0	0	1	0	
0	1	0	1	$\longrightarrow$ $(\overline{X}Y\overline{Y})$
0	1	1	0	
1	0	0	1	$\longrightarrow$ $(X\overline{Y}\overline{Z})$
1	0	1	1	$\longrightarrow$ $(X\overline{Y}\overline{Z})$
1	1	0	0	
1	1	1	1	$\longrightarrow$ (XYZ)

วิธีทำ เขียนสมการ (SOP) ได้ว่า $f\,(X,Y,Z) = \overline{X}\overline{Y}\overline{Z} + \overline{X}Y\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + X\overline{Y}\overline{Z} + XYZ$

$$= \overline{X}\overline{Z}(\overline{Y}+Y) + X\overline{Y}(\overline{Z}+Z) + XYZ$$

$$= \overline{X}\overline{Z} + X(\overline{Y}+YZ)$$

$$= \overline{X}\overline{Z} + X\overline{Y} + XZ$$

ตอบ สมการ SOP ที่ลดรูปแล้วคือ $f\,(X,Y,Z) = \overline{X}\overline{Z} + X\overline{Y} + XZ$

สมการพีชคณิตบูลีนแบบ Product of Sum (POS) หรือสมการแบบ Max term รูปแบบของสมการแบบ POS จะตรงข้ามกับสมการแบบ SOP ตั้งแต่การพิจารณาเอาต์พุต การเขียนตัวแปรแต่ละตัว และการติดเครื่องหมาย NOT ที่ตัวแปรเหล่านั้น สรุปวิธีการเขียนสมการ POS คือต้องนำเทอมของเอาต์พุตที่มีผลลัพธ์เป็น 0 มาเขียนโดยกำหนดตัวแปรที่มีค่าเป็น 0 แทนด้วย A , B หรือ C และตัวแปรที่มีค่าเป็น 1 แทนด้วย $\overline{A},\overline{B}$ หรือ $\overline{C}$ กระทำการ *OR* กันแล้วนำผลลัพธ์ของการ *OR* ทุก ๆ เทอมที่เป็น 0 นำมา AN*D* กัน ก็จะได้สมการ SOP

พิจารณาตารางความจริงต่อไปนี้

X	Y	Z	f(X,Y,Z)	
0	0	0	1	
0	0	1	0	$\rightarrow (X+Y+\overline{Z})$
0	1	0	1	
0	1	1	0	$\rightarrow (X+\overline{Y}+\overline{Z})$
1	0	0	1	
1	0	1	1	
1	1	0	0	$\rightarrow (\overline{X}+\overline{Y}+Z)$
1	1	1	1	

นำทั้ง 3 เทอมมา AND กัน คือฟังก์ชันแบบ SOP

จากตารางความจริงนำมาเขียนสมการ POS ได้ว่า

$$
\begin{aligned}
f(X,Y,Z) &= (X+Y+\overline{Z})(X+\overline{Y}+\overline{Z})(\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}) \\
f(X,Y,Z) &= (\overline{X}\overline{Y}\overline{Z})+(\overline{X}YZ)+(XY\overline{Z}) \\
&= \overline{X}Z(\overline{Y}+Y)+XY\overline{Z} \\
&= \overline{X}Z+XY\overline{Z} \\
f(X,Y,Z) &= (X+\overline{Z})\ (\overline{X}+\overline{Y}+\overline{Z}) \\
&= X\overline{X}+X\overline{Y}+XZ+\overline{X}\overline{Z}+\overline{Z}\overline{Y}+\overline{Z}Z \\
&= X\overline{Y}+XZ+\overline{X}\overline{Z}+\overline{Z}\overline{Y} \\
&= X\overline{Y}+\overline{X}\overline{Z}+\overline{Z}\overline{Y}+XZ \\
&= X\overline{Y}+\overline{X}\overline{Z}+\overline{Z}\overline{Y}(X+\overline{X})+XZ \\
&= X\overline{Y}+\overline{X}\overline{Z}+\overline{Z}\overline{Y}X+\overline{Z}\overline{Y}\overline{X}+XZ \\
&= X\overline{Y}(1+\overline{Z})+\overline{X}\overline{Z}(1+\overline{Y})+XZ \\
&= X\overline{Y}+\overline{X}\overline{Z}+XZ
\end{aligned}
$$

จากผลการลดรูปสมการ POS จะเห็นว่าให้ผลลัพธ์เท่ากันกับการถอดสมการแบบ SOP จากตารางความจริง ดังนั้นเราจะใช้วิธีถอดสมการแบบใดก็ได้ขึ้นอยู่กับความเหมาะสมของเอาต์พุตตารางความจริง เช่น ถ้าเอาต์พุตมี “0” มากกว่า “1” เราก็ควรใช้วิธี SOP หรือถ้าเอาต์พุตมี “1” มากกว่า “0” ก็อาจใช้วิธี POS เป็นต้น เพื่อให้สมการที่ถอดได้ไม่ยาวมากเกินไป การใช้สมการพีชคณิตบูลีนลดรูปสมการจะผิดพลาดน้อยลง

3.6 การใช้ตัวเลขแทนสมการ SOP และ POS

เราสามารถเขียนสมการตัวเลขแทนสมการ SOP ได้โดยกำหนดเครื่องหมาย Σ เข้ากับกลุ่มตัวเลขประจำบรรทัดของตารางความจริงในช่องที่มีเอาต์พุตเป็น 1 ตัวอย่างเช่น สมการ $f(A,B,C,D)$ เท่ากับ $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+\overline{A}\,\overline{B}CD+AB\overline{C}D$ จะเห็นว่าเป็นสมการ SOP ซึ่งมี 4 ตัวแปร คือ A,B,C,D และเอาต์พุตของสมการนี้จะเป็น 1 อยู่ 4 บรรทัด คือ (1) บรรทัดที่ $ABCD=0$, (2) บรรทัดที่ $AB=0, CD=1$ (3) บรรทัดที่ $AC=0, BD=1$ และ (4) บรรทัดที่ $ABD=1$ และ $C=0$ วิธีเขียนตัวเลขแทนสมการให้ทำดังนี้

$$
\begin{aligned}
f(A,B,C,D) &= \underbrace{\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}}+\underbrace{\overline{A}\,\overline{B}CD}+\underbrace{\overline{A}B\overline{C}D}+\underbrace{AB\overline{C}D} \\
&= \underbrace{0000}+\underbrace{0011}+\underbrace{0101}+\underbrace{1101} \\
&= \quad 0 \qquad\quad 3 \qquad\quad 5 \qquad\quad 13 \\
f(A,B,C,D) &= \Sigma(0, 3, 5, 13)
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 3-15 ถ้า $f(W,X,Y,Z) = \Sigma(1, 5, 13, 15)$ จงเขียนสมการ SOP

วิธีทำ $f(W,X,Y,Z) = \Sigma(1, 5, 13, 15)$

$= 0001 + 0101 + 1101 + 1111$

ตอบ $f(W,X,Y,Z) = \overline{W}\,\overline{X}\,\overline{Y}Z+\overline{W}X\overline{Y}Z+WX\overline{Y}Z+WXYZ$

การใช้ตัวเลขแทนสมการ POS

ในสมการแบบ SOP นั้น ตัวเลขที่แทนสมการคือ จำนวนบรรทัดแต่ละบรรทัดที่มีเอาต์พุตเป็น “1” นำมาร่วมกันภายใต้เครื่องหมาย Σ เช่น $f(A,B,C)=\Sigma(0,2,4,6)$ เป็นต้น แต่สมการแบบ POS นั้นจะนับเอาค่าตัวเลขเฉพาะบรรทัดที่มีเอาต์พุตเป็น “0” มาเขียนรวมกัน ภายใต้เครื่องหมาย π เช่น $f(A,B,C)=\pi(1,3,5,7)$ เป็นต้น และต้องอย่าลืมว่าในสมการแบบ POS นั้น ตัวแปรแต่ละตัวต้องเป็น NOT เมื่อค่าคงที่ของตัวมันเป็น “1” และแต่ละบรรทัดที่เอาต์พุตเป็น “0” ต้องนำเอาตัวแปรทุกตัวมากระทำการ OR กัน

ตัวอย่าง 3-16 $f(A,B,C) = (A+B+C)\cdot(A+B+C)\cdot(A+\overline{B}+\overline{C})$ จงเขียนสมการ POS

วิธีทำ $f(A,B,C) = \underbrace{(A+B+C)}\cdot\underbrace{(A+B+\overline{C})}\cdot\underbrace{(A+\overline{B}+\overline{C})}$

$= \underbrace{(000)} \quad \underbrace{(001)} \quad \underbrace{(011)}$

$= 0 \quad 1 \quad 3$

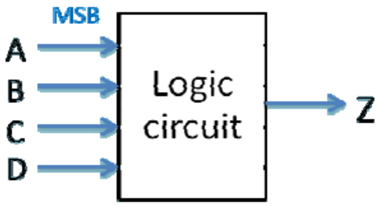
ตอบ $f(A,B,C) = \pi\ (0, 1, 3)$

ตัวอย่าง 3-17 ถ้า $f(A,B,C,D) = \pi\ (2, 4, 8, 13, 15)$ จงเขียนสมการ POS

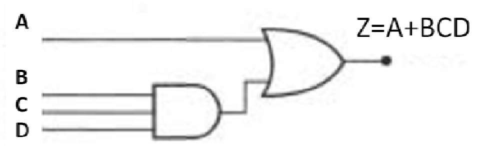
$f(A,B,C,D) = (0010)\cdot(0100)\cdot(1000)\cdot(1101)\cdot(1111)$

ตอบ $f(A,B,C,D) = (A+B+\overline{C}+D)\cdot(A+\overline{B}+C+D)\cdot(\overline{A}+B+C+D)\cdot$
$(\overline{A}+\overline{B}+C+\overline{D})\cdot(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})$

ตัวอย่าง 3-18 จากตารางความจริงและวงจรลอจิกขนาด 4 อินพุตดังรูป 3.6(a) จงลดรูปสมการแบบ SOP ด้วยพีชคณิตบูลีนให้มีขนาดเล็กที่สุด



(a)



(b)

	A	B	C	D		z	
(0)	0	0	0	0		0	
(1)	0	0	0	1		0	
(2)	0	0	1	0		0	
(3)	0	0	1	1		0	
(4)	0	1	0	0		0	
(5)	0	1	0	1		0	
(6)	0	1	1	0		0	
(7)	0	1	1	1		1	→ $\overline{A}BCD$
(8)	1	0	0	0		1	→ $A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}$
(9)	1	0	0	1		1	→ $A\overline{B}\,\overline{C}D$
(10)	1	0	1	0		1	→ $A\overline{B}C\overline{D}$
(11)	1	0	1	1		1	→ $A\overline{B}CD$
(12)	1	1	0	0		1	→ $AB\overline{C}\,\overline{D}$
(13)	1	1	0	1		1	→ $AB\overline{C}D$
(14)	1	1	1	0		1	→ $\overline{A}BC\overline{D}$
(15)	1	1	1	1		1	→ $ABCD$

รูปที่ 3.6

วิธีทำ $z = \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\overline{B}\,\overline{C}D + A\overline{B}C\overline{D} + A\overline{B}CD + AB\overline{C}\,\overline{D} + AB\overline{C}D + ABC\overline{D} + ABCD$

$z = \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C}\ (\overline{D}+D) + A\overline{B}C(\overline{D}+D) + AB\overline{C}(\overline{D}+D) + ABC(\overline{D}+D)$

$= \overline{A}BCD + A\overline{B}\,\overline{C} + A\overline{B}C + AB\overline{C} + ABC$

$= \overline{A}BCD + A\overline{B} + (\overline{C}+C) + AB(\overline{C}+C)$

$= \overline{A}BCD + A\overline{B} + AB$

$= \overline{A}BCD + A(\overline{B}+B)$

$= \overline{A}BCD + A$

ตอบ $z = A + BCD$ (ดังแสดงในรูป 3.6 (b))

แบบฝึกหัดบทที่ 3 พีชคณิตบูลีน

จากตารางความจริงต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 1-5

A	B	C	Y	
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	1	1
0	1	1	1	2
1	0	0	1	3
1	0	1	1	4
1	1	0	0	
1	1	1	0	

1. จงเขียน SOP ของหมายเลข 1

    1. $\overline{A}\ \overline{B}\ C$
    2. $\overline{A}\ B\ C$
    3. $A\ \overline{B}\ \overline{C}$
    4. $\overline{A}\ B\ \overline{C}$

2. จงเขียน SOP ของหมายเลข 4

    1. $A\ \overline{B}\ C$
    2. $\overline{A}\ B\ C$
    3. $A\ \overline{B}\ \overline{C}$
    4. $\overline{A}\ B\ \overline{C}$

3. จงเขียน POS ของหมายเลข 2

    1. $A+\overline{B}+C$
    2. $A+\overline{B}+\overline{C}$
    3. $\overline{A}+B+C$
    4. $\overline{A}+B+C$

4. สมการ SOP ของ Y คือข้อใด

    1. $(\overline{A}\ B\ \overline{C})+(\overline{A}\ B\ C)+(A\ \overline{B}\ \overline{C})+(A\ \overline{B}\ C)$
    2. $(\overline{A}\ B\ \overline{C})+(A\ \overline{B}\ C)+(A\ \overline{B}\ \overline{C})+(A\ B\ \overline{C})$
    3. $(\overline{A}\ B\ \overline{C})+(\overline{A}\ \overline{B}\ C)+(A\ \overline{B}\ \overline{C})+(A\ \overline{B}\ C)$
    4. $(\overline{A}\ B\ \overline{C})+(\overline{A}\ B\ C)+(A\ \overline{B}\ \overline{C})+(\overline{A}\ \overline{B}\ \overline{C})$

5. สมการ POS ของ Y คือข้อใด

   1. $(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$
   2. $(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$
   3. $(A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$
   4. $(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+C)$

6. สมการ F= A (B+C) A +D เมื่อลดรูปแล้วได้ดังข้อใด

   1. C+D 2. D
   3. AD 4. B+D

7. สมการ $F=\overline{\overline{A+B}+\overline{C}}$ เมื่อลดรูปแล้วได้ดังข้อใด

   1. (A+B)C 2. $(A+\overline{B})C$
   3. $A+\overline{C}$ 4. (A B)+C

8. ถ้า $f(A,B,C)=\Sigma(0,\ 1,\ 4,\ 5,\ 6)$ สมการที่ถูกต้องคือข้อใด

   1. $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+(\overline{A}\,B\,C)+(A\,\overline{B}\,\overline{C})+(A\,\overline{B}\,C)+(\overline{A}\,B\,\overline{C})$
   2. $(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(A+B+\overline{C})$
   3. $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+(\overline{A}\,\overline{B}\,C)+(A\,\overline{B}\,\overline{C})+(A\,\overline{B}\,C)+(\overline{A}\,\overline{B}\,C)$
   4. $(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})+(\overline{A}\,\overline{B}\,C)+(A\,\overline{B}\,\overline{C})+(A\,\overline{B}\,C)+(A\,B\,\overline{C})$

จากตารางความจริงต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 9-14

A	B	C	Y
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

9. สมการ SOP ตรงกับข้อใด

1. $f(A,B,C)=\Sigma(0,4,5,6)$ 2. $f(A,B,C)=\Pi(0,4,6,7)$

3. $f(A,B,C)=\Sigma(0,4,6,7)$ 4. $f(A,B,C)=\Sigma(0,3,4,7)$

10. สมการ POS ตรงกับข้อใด

1. $f(A,B,C)=\Pi(0,4,5,6)$ 2. $f(A,B,C)=\Pi(1,2,3,5)$

3. $f(A,B,C)=\Pi(0,4,6,7)$ 4. $f(A,B,C)=\Sigma(0,3,4,7)$

11. สมการ SOP เต็มรูปตรงกับข้อใด

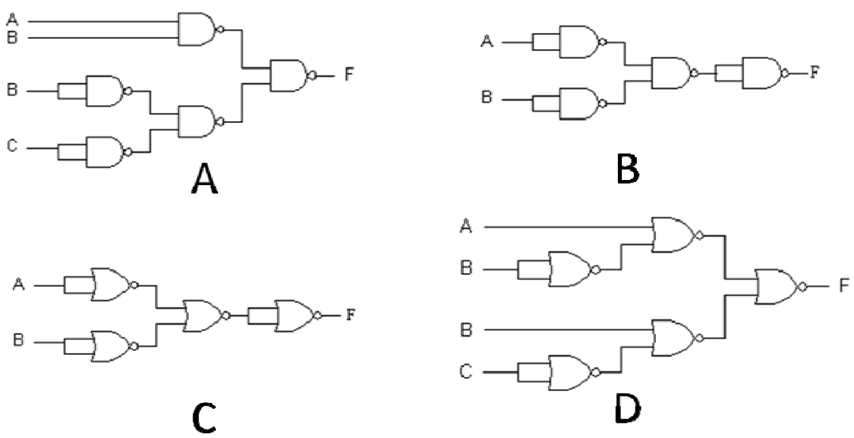
1. $(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})+(\bar{A}\,B\,C)+(A\,\bar{B}\,\bar{C})+(A\,\bar{B}\,C)$
2. $(\bar{A}+B+\bar{C})\,(\bar{A}+\bar{B}+C)\,(A+B+\bar{C})\,(A+B+\bar{C})$
3. $(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})+(\bar{A}\,\bar{B}\,C)+(A\,\bar{B}\,\bar{C})+(A\,B\,C)$
4. $(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})+(A\,\bar{B}\,\bar{C})+(A\,B\,\bar{C})+(A\,B\,C)$

12. สมการ SOP ลดรูปในรูป NAND Gate พียงอย่างเดียวตรงกับข้อใด

1. $\overline{(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})}$ 2. $\overline{(\bar{A}\,\bar{B}\,\bar{C})+A}$

3. $\overline{\overline{(\bar{B}\,\bar{C})}\,\overline{(A\,B)}}$ 4. $\overline{\overline{(B\,C)}\,\overline{(A\,C)}}$

13. วงจรลอจิกที่ลดรูปแล้วในรูป NAND Gate พียงอย่างเดียวตรงกับข้อใด



14. วงจรลอจิกที่ลดรูปแล้วในรูป NOR Gate ตรงกับข้อใด(ใช้คำตอบจากข้อ 13)

<u>โจทย์ฝึกเพิ่มเติม</u>

1. ถ้า $f(A,B,C,D) = \pi\ (0, 2, 9, 10, 11, 12)$ จงลดรูปสมการนี้ให้สั้นที่สุด

2. จงลดรูปสมการต่อไปนี้

   a) $f(X,Y,Z) = (X+\overline{X}+\overline{Y})\ X\overline{Z}+X\overline{Z}(Y+\overline{Y})$

   b) $T = (XY)+(X\overline{Y})+(\overline{X}Z)$

   c) $T = A\overline{D}\ (\overline{B}+\overline{C})+(\overline{B}+C)+(B+\overline{C})$

3. จงพิสูจน์ว่าสมการต่อไปนี้เท่ากัน

   a) $\overline{A}B+AC = AC+BC+(\overline{A}\overline{C}B+B\overline{A}\overline{C})$

   b) $AB+(AB+\overline{A}\overline{B}) = A+B$

   c) $(X+\overline{Z})(X+Y+\overline{Z})(Y+\overline{Z}) = \overline{Z}+XZ$

4.จงใช้ทฤษฎีดีมอร์แกนเปลี่ยนรูปสมการพีชคณิตบูลีนต่อไปนี้

$F = \overline{\overline{A}B\overline{C}} \qquad F = \overline{A(\overline{B+\overline{C}})D} \qquad F = \overline{\overline{\overline{AB}C}D} \qquad F = \overline{\overline{A}+\overline{B}C}$

5.จงพิสูจน์ว่าสมการ $F = (\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}BC+AB\overline{C}+ABC)$ มีค่าเท่ากับ B